Θεωρία Αριθμών

7/10/2016

Άρτιοι = 2κ για κάποιο κ ακέραιο.
Περιττοί = 2λ+1 για κάποιο λ ακέραιο.

Μια Μαθηματική πρόταση είναι μια γραμματική πρόταση η οποία περιέχει κάποια ή κάποιες μεταβλητές και η αλήθεια εξαρτάται από τις ακριβείς τιμές που λαμβάνει η μεταβλητή

π.χ Πρόταση

$x^2 = y^2 \Rightarrow x = y \quad x, y \in \mathbb{R}$

$(-1)^2 = 1^2 \Rightarrow -1 = 1$ ψευδής

$(1)^2 = (1)^2 \Rightarrow 1 = 1$ αληθής

π.χ Πρόταση $|x| > 0$ και $x \in \mathbb{R}$

$x = -1 \Rightarrow |-1| > 0$ αληθείς

$x = 0 \Rightarrow |0| > 0$ ψευδής

Πως αποδεικνύουμε Καθολικές Προτάσεις

1.) Γράφουμε την πρόταση (Θεώρημα) που θέλουμε να αποδείξουμε ώστε:
- να είναι εύκολα κατανοητή
- καθαρά και σύντομα χωρίς ασάφειες
- χωρίς περιττές λέξεις

2.) Η απόδειξη μας πρέπει να εκφράζεται με πλήρεις προτάσεις οι οποίες δεν αφήνουν μαθηματικές ασάφειες (ερωτήματα)

Αν χρειασθεί να ορίσουμε μεταβλητές τις καθορίζουμε στην αρχή ορίζοντας τα σύνολα από τα οποία λαμβάνουν τιμές

π.χ Έστω m και n ακέραιοι.

Αν οι μεταβλητές μας έχουν ή αποκτούν κάποια επιπλέον ιδιότητα (κατά την διάρκεια της απόδειξης) τη δηλώνουμε.

π.χ. Ο φυσικός n είναι άρτιος $(n = 2k)$.

Προσοχή! Χρησιμοποιούμε παραδείγματα για να αντιληφθούμε καλύτερα τι θέλουμε να αποδείξουμε ΌΧΙ για να αποδείξουμε

π.χ Άθροισμα άρτιων είναι άρτιος $4+6=10$

3.) Δεν χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο - γράμμα για να δηλώσουμε διαφορετικές έννοιες

π.χ Έστω m και n περιττοί. Δηλαδή $m=2k+1$, $n=2k+1$ όχι $m=2k+1$, $n=2l+1$

4.) Κατά την απόδειξη δεν πηδάμε βήματα.

π.χ Έστω m και n άρτιοι. Τότε το άθροισμά τους είναι άρτιος

$m=2k$ και $2l$ $\Rightarrow m+n=2k+2l \Rightarrow m+n=2(n+l)$

5.) Πολλές φορές βοηθάει να τροποποιήσουμε ισοδύναμα την πρότασή μας

π.χ Το γινόμενο περιττών είναι περιττός

$m=2k+1$

$n=2l+1$ $\quad k,l\in\mathbb{Z}$

mn περιττός $\Leftrightarrow$ θέλω $mn=2a+1$

$m\cdot n=(2k+1)(2l+1)=2k\,2l+2k+2l+1$

$=2(2kl+k+l)+1=2a+1$

6.) Προσοχή με το εάν

Δεν μπερδεύουμε το εάν με το γιατί

π.χ Έστω p πρώτος. Επειδή p πρώτος, τότε.

7.) Αντιπαράδειγμα: Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια πρόταση δεν είναι πάντα αληθής, τότε βρίσκουμε ένα παράδειγμα

π.χ $a^2=b^2$, τότε $a=b$, $a=-1$ κ' $b=1$ Δεν ισχύει.

→ Τα παραδείγματα κ' αντιπαραδείγματα βοηθούν τη διαίσθησή μας.

(2)
Θεωρία Αριθμών
7/10/2016.

8.) Εικασίες ή ισχυρισμοί είναι σημαντικές μαθηματικές προτάσεις οι οποίες δεν έχουν αποδειχθεί.
π.χ Εικασία του Goldbach
Κάθε άρτιος φυσικός μεγαλύτερος του 5 είναι σαν άθροισμα "δύο" πρώτων.
Έχουν εξεταστεί όλες οι περιπτώσεις μέχρι
100.000.000.000.000.000

Τελευταίο Θεώρημα του Fermat (1650)
(αποδείχθηκε το 2000)
Αν n φυσικός > 2, τότε δεν υπάρχουν φυσικοί x, y και z ώστε $x^n + y^n = z^n$.
Εξετάσθηκε για $n > 200.000$.

9.) Προσοχή στις συνεπαγωγές $\Rightarrow$ $\Leftarrow$

1.) Το a διαιρείται από 6. άρα διαιρείται και από το 3
$a = 6n = 3 \cdot 2 = n$

2.) ο Μιχάλης έχει μεγάλη βαλίτσα στο ταξίδι, άρα έχει πολλά ρούχα.

3.) Το μπουζούκι είναι όργανο. Ο αστυφύλακας είναι όργανο άρα ο αστυφύλακας είναι μπουζούκι

4.) Αν έρθεις στην εργασία τη Δευτέρα, θα σε προσλάβουμε.

Αθροίσματα - Γινόμενα.

$1+2+3+\dots+\nu = a_1+a_2+\dots+a_\nu$

Ακολουθία: Έστω $A\subseteq\mathbb{N}$ και $f: A\to B$ συνάρτηση. Τότε η f καλείται ακολουθία.

π.χ.

$a_\nu = \mathbb{N}$ $\quad \nu\in\mathbb{N}$ $\quad a_1=1$, $a_2=2$.

$a_\nu = \nu^3+2$ $\quad \nu\geq 5$

$a_\nu = 1+\frac{1}{\nu+1}$ $\quad 5\leq\nu\leq 12$

Αν $a_\nu = a_{\nu-1}+\omega$ και $a_1=a$

Τότε $\underset{\overset{\uparrow}{a}}{a_1}+\underset{\overset{\uparrow}{a+\omega}}{a_2}+\dots+\underset{\overset{\uparrow}{a+(\nu-1)\omega}}{a_\nu} = \frac{(a_1+a_\nu)\nu}{2} = \frac{(2a+(\nu-1)\omega)\nu}{2}$

Αν $a_\nu = a_{\nu-1}+\omega$ και $a_1=a$

$a_1=a$, $a_2=a\omega$, $a_3=a\omega^2$, $a_4=a\cdot\omega^3$, $\dots$, $a_\nu=a\cdot\omega^{\nu-1}$.

$a_1+a_2+\dots+a_\nu = a+a\omega+\dots+a\omega^{\nu-1} = a(1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{\nu-1})$

Ορισμός: Έστω $m\leq n$ ακέραιοι το σύμβολο $\sum_{i=m}^{n} a_i$ (το οποίο διαβάζεται το άθροισμα από το m μέχρι το n των στοιχείων της ακολουθίας a_i) είναι το άθροισμα $a_m+a_{m+1}+\dots+a_{n-1}+a_n$. Η μεταβλητή i καλείται δείκτη και λαμβάνει τιμές από m μέχρι n.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m+a_{m+1}+\dots+a_n$$

π.χ. 1) $a_i = i$ $\quad i\in\mathbb{Z}$

$a_1+\dots+a_\nu = 1+2+\dots+\nu = \sum_{i=1}^{\nu} a_i$

2.) Αν $a_i = \frac{(-1)^i}{(i+1)}$ να βρείτε το $\sum_{i=0}^{9} a_i$

$$\sum_{i=0}^{9} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 1 + \left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}$$

3.) $a_i = \omega^i$

$$\sum_{i=0}^{10} a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_{10} = 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{10}$$

4.) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(j+1)^2}$

$$\left.\begin{array}{ll} i=1 & j=0 \\ i=2 & j=1 \\ i=3 & j=2 \end{array}\right\} j = i-1$$

Ορισμός:

Έστω $m \leq n$ ακέραιοι το σύμβολο $\prod_{i=m}^{n} a_i$ (το οποίο διαβάζεται το γινόμενο από το m μέχρι το n των στοιχείων της ακολουθίας a_i) είναι το γινόμενο $a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$. Η μεταβλητή i καλείται δείκτη και λαμβάνει τιμές από m μέχρι n.

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

ορισμός $v!$

π.χ. $a_v = v$ $\quad \prod_{i=1}^{v} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots v = v!$

π.χ. $a_v = \frac{v}{v+1}$ $\quad \prod_{i=3}^{7} a_i = a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 = 3/8$